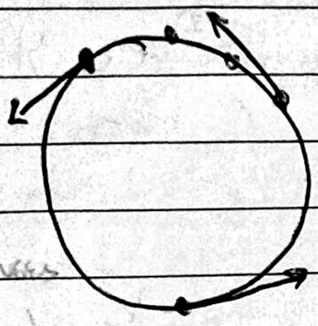
08/05/2017

Μάθημα 15ο
Απει 4

Θεωρούμε επίσης κυρίως κανονικές (παραμετρικές) καμπύλες $\bar{\gamma} : \underbrace{[a,b]}_{t\in} \to \mathbb{R}^n$ (δηλ. $\bar{\gamma}$: C^1-συνάρτηση με $\|\bar{\gamma}'(t)\| > 0$ για κάθε $t \in [a,b]$)



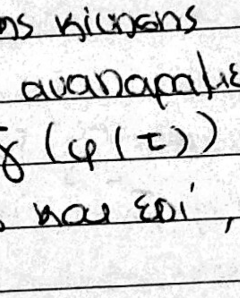
Διάφορα ενός προσανατολισμού (σε μια απλή κλειστή καμπύλη) ο θετικός προσανατολισμός της καμπύλης, είναι αυτός όπου το «εσωτερικό» είναι αριστερά της κίνησης επί της καμπύλης

($\bar{\gamma}'(t) \neq 0$) Μπορώ να αναπαραμετρικοποιήσω την καμπύλη, δηλ $\bar{J}(\tau) = \bar{\gamma}(\varphi(\tau))$, $\tau \in [A,B]$,
$\varphi : [A,B] \to [a,b]$, 1-1 και επί, C^1, $\varphi'(\tau) \neq 0$ $\forall \tau \in [A,B]$
(C^1-π.μ.)

Έτσι ώστε να διατηρεί η $\bar{J}$ τον προσανατολισμό της $\bar{\gamma}$, αρκεί να απαιτούνται $\varphi'(\tau) > 0$ $\forall \tau \in [a,b]$ ενώ αν έχω $\varphi'(\tau) < 0$ $\forall \tau \in [a,b]$, ο προσανατολισμός αντιστρέφεται.

Αυτό ισχύει αφού $\bar{J}'(\tau) = \underbrace{\bar{\gamma}'(\varphi(\tau))\ \varphi'(\tau)}$

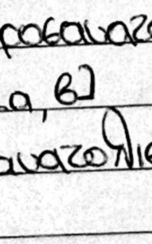
κανόνας αλυσίδας



$\bar{\gamma}'(\varphi(t))$

$\bar{\gamma}'(\varphi(\tau))$ αν $\varphi'(\tau) > 0$

$\bar{J}'(\tau)$



$\bar{J}'(\tau)$

αν $\varphi'(\tau) < 0$

$\bar{\gamma}'(\varphi(\tau))$

Επίσης, για τον ίδιο λόγο δεν αλλάζει το μήκος μιας καμπύλης αν αναπαραμετρικοποιηθεί και γίνει $\bar{J} = \bar{\gamma} \circ \varphi$ αφού

$$L(\bar{\gamma}) = \int_a^b \|\bar{\gamma}'(t)\| dt = \int_a^b \|\bar{J}'(\tau)\| \cdot |\varphi'(\tau)| \, d\tau \quad \text{κανόνας αλλαγής μεταβλ.}$$

μήκος καμπύλης

$$= \int_A^B \|\bar{J}'(\tau)\| \, d\tau = L(\bar{J})$$

Άρα αν $C \subset \mathbb{R}^n$ είναι η εικόνα μιας κανονικής ⊛ καμπύλης $\bar{\gamma}$ τότε μπορούμε να πούμε ότι το μήκος του C είναι:

$$L(C) = \int_a^b \|\bar{\gamma}'(t)\| dt$$

⊛ απλής ή απλής κλειστής

Επίσης, η αντίστροφη της $\bar{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ καμπύλη
$\bar{\gamma}^- : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\bar{\gamma}^-(t) := \bar{\gamma}(\underbrace{a+b-t}_{``\varphi(t)})$, $t \in [a,b]$ $\Rightarrow \varphi'(t) = -1$

<u>Ορισμός:</u> Έστω μία κανονική καμπύλη $\bar{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$
Η συνάρτηση $S(t) = \int_a^t \|\bar{\gamma}'(\tau)\| d\tau$, $t \in [a,b]$

Λέγεται συνάρτηση μήκους τόξου της καμπύλης $\bar{\gamma}$

<u>Πρόταση:</u> Η αντίστροφη συνάρτηση $S^{-1} : [0, L(\bar{\gamma})] \to [a,b]$ είναι ένας C^1 - παραμετρικός μετασχηματισμός

<u>Απόδειξη</u>

$S'(t) = \underbrace{\|\bar{\gamma}'(t)\|}_{>0 \text{ (αφού κανονική καμπύλη)}} \Rightarrow S'$ συνεχής και υπάρχει. (Άρα C^1)
Αφού $\bar{\gamma}$ κανονική $\Rightarrow S$ αύξουσα (γνησίως) $\Rightarrow S$ 1-1 $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, S^{-1} : [0, L(\bar{\gamma})] \to [a,b]$ 1-1 κ' επί.

s^{-1} C^1 με $(s^{-1})(\tau) = \dfrac{1}{s'(s^{-1}(\tau))}$

$\tau \in [0, L(\bar{\gamma})]$

$$\left[(s^{-1} \circ s)'(t) = 1 \right]$$

Ορισμός: (SOS)

Έστω $\bar{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ μια κανονική καμπύλη. Η καμπύλη $\tilde{\gamma} = \bar{\gamma} \circ s^{-1} : [0, L(\bar{\gamma})] \to \mathbb{R}^n$ όπου $s : [a,b] \to [0, L(\bar{\gamma})]$ η συνάρτηση μήκους τόξου της $\bar{\gamma}$ ονομάζεται αναπαραμετρικοποίηση ως προς μήκος τόξου

Πρόταση

και ισχύει ότι $\|\tilde{\gamma}'(\tau)\| = 1$ $\forall \tau \in [0, L(\bar{\gamma})]$, και αντίστροφα κάθε καμπύλη με μοναδιαία ταχύτητα είναι παραμετρικοποιημένη ως προς μήκος τόξου

Απόδειξη

$\tilde{\gamma}'(\tau) = \bar{\gamma}'(s^{-1}(\tau))\,(s^{-1})'(\tau)$

$\|\bar{\gamma}'(s^{-1}(\tau))\|$

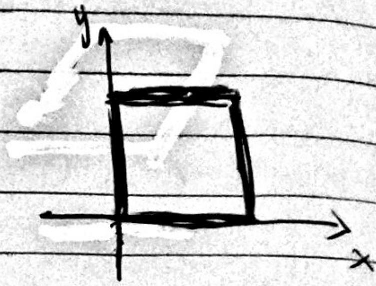
$\Rightarrow \|\tilde{\gamma}'(\tau)\| = 1$

Επίσης, $s(t) = \int_a^t \overbrace{\|\bar{\gamma}'(t)\|}^{=1} dt$, $t \in [a, b] \Rightarrow$

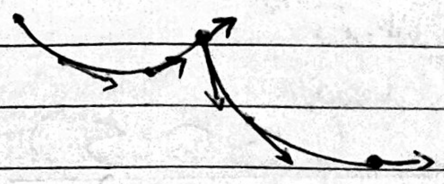
$\Rightarrow s(t) = t - a$

Ένωση Καμπυλών

Έστω ότι έχω μια (εικόνα) καμπύλης:



Αν μια καμπύλη δεν έχει «ενιαία» κανονική παραμετρικοποίηση $\bar{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ τότε μπορούμε να ενώσουμε πεπερασμένο αριθμό από κανονικές καμπύλες.



Ορισμός: Έστω οι καμπύλες $\bar{\gamma}_i:[a_i,b_i]\to\mathbb{R}^n$, $i=1,\dots,n$ με $\bar{\gamma}_i(b_i)=\bar{\gamma}_{i+1}(a_{i+1})$ για $i=1,\dots,k-1$

[δηλ. το αρχικό σημείο κάθε επόμενης είναι το τελικό της προηγούμενης, βλ. σχήμα]

Τότε η καμπύλη $\bar{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ με $a=a_1$

$b=a_1+\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i)$ και

$$\bar{\gamma}(t):=\bar{\gamma}_i\left(t+a_i-a_1-\sum_{j=1}^{i-1}(b_j-a_j)\right)$$

$$\forall\ t\in\left[a_1+\sum_{j=1}^{i-1}(b_j-a_j),\ a_1+\sum_{j=1}^{i}(b_j-a_j)\right],\ i=1,\dots,k$$

λέγεται ένωση των $\gamma_1\oplus\gamma_2\oplus\dots\oplus\gamma_k$